

Ejercicios Unidad 1

Probabilidad I 2026-1

Entrega: sábado 6 de septiembre

Para todas las siguientes preguntas considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. **En todos los problemas acompañe su respuesta con un diagrama simple que ilustre claramente los pasos de su razonamiento.**

1. Sean $A, B, C \in \mathcal{F}$ pruebe que,

a) Si $A \subseteq B$

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

b) Si $A \subseteq B$

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$$

c)

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

2. Consideremos una diana con tres anillos concéntricos de radios 1, 2 y 3. Si un dardo se lanza aleatoriamente sobre la diana,

(a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

(b) Defina una medida de probabilidad sobre el espacio de eventos $\mathcal{F}$.

Hint: Vimos en clase que el área de una superficie es una medida. No es necesario especificar cuál es el espacio de eventos.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el anillo más interno?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que no caiga en el anillo más externo?

3. Sea un espacio muestral Ω con tres resultados igualmente probables: $\{a, b, c\}$. Define dos eventos A, B y muestra que se cumple que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

4. Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}$, pruebe que

a) Si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para toda n , entonces $\mathbb{P}(\cap_{n \geq 1} A_n) = 1$

b) Si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para alguna n , entonces $\mathbb{P}(\cup_{n \geq 1} A_n) = 1$

c) Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para alguna n , entonces $\mathbb{P}(\cap_{n \geq 1} A_n) = 0$

d) Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para toda n , entonces $\mathbb{P}(\cup_{n \geq 1} A_n) = 0$

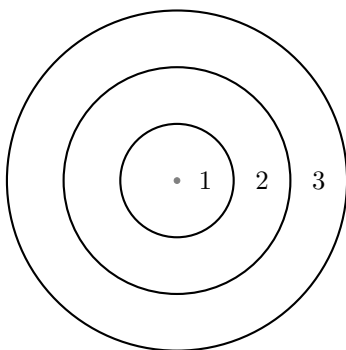


Figura 1: Representación de la diana.

5. Demuestre que la interpretación clásica de la probabilidad satisface los axiomas de una medida de probabilidad.
6. Suponga que simultáneamente se lanza una moneda justa, un dado balanceado y se toma una carta al azar de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila, un puntaje de 5 o 6 en el dado y obtener personaje rojo?
7. Una lotería consiste en elegir 6 números distintos entre 1 y 49.
 - a) ¿Cuántos boletos distintos se pueden formar?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar exactamente los 6 números ganadores con un solo boleto?
8. Pruebe que

$$\binom{n}{m} \binom{n-m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m},$$

e interprete este resultado.

9. Si $E \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathbb{P}(E) > 0$, muestre que $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|E),$$

es una medida de probabilidad.

10. En una fábrica, el 3% de las piezas producidas son defectuosas. Se selecciona al azar una pieza y se prueba:
 - Si es defectuosa, la máquina de control la detecta con probabilidad 0.9.
 - Si no es defectuosa, la máquina la rechaza erróneamente con probabilidad 0.05.

Calcula:

- a) La probabilidad de que una pieza seleccionada sea rechazada.
- b) La probabilidad de que una pieza rechazada sea defectuosa.

11. En una urna hay 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Se juega de la siguiente manera:

- Se lanza un dado justo de seis caras.
- Si sale un número par, se extrae una sola bola de la urna.
- Si sale un número impar, se extraen dos bolas sin reemplazo de la urna.

Sea el evento R : “la última bola extraída es roja”.

a) Calcula la probabilidad de R

12. En un ensayo clínico, se prueba un nuevo test para detectar una enfermedad. Se sabe que:

- La prevalencia de la enfermedad en la población es del 2 %.
- La sensibilidad del test (probabilidad de que el test sea positivo dado que la persona tiene la enfermedad) es del 95 %.
- La especificidad del test (probabilidad de que el test sea negativo dado que la persona no tiene la enfermedad) es del 90 %.

(a) Calcula la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga un resultado positivo en el test.

(b) Si una persona recibe un resultado positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad?

(c) Discute la importancia de la especificidad y la sensibilidad en el contexto de los falsos positivos y falsos negativos.

13. En el famoso programa de Chabelo, un concursante debe elegir entre tres puertas, detrás de una de las cuales hay un premio grande, mientras que detrás de las otras dos hay premios de menor valor. El concursante elige una puerta, pero antes de abrirla, Chabelo, quien sabe dónde está el premio grande, abre una de las otras dos puertas y muestra un premio de menor valor. Luego, le da al concursante la opción de cambiar su elección a la otra puerta restante.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio grande si el concursante mantiene su elección original?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio grande si el concursante decide cambiar de puerta?

(c) ¿Cuál es la estrategia óptima para maximizar la probabilidad de ganar el premio grande? Explica tu razonamiento.

14. Si E y F son dos eventos independientes, muestre que también lo son E y F^c ; E^c y F ; y E^c y F^c .

15. Encuentre un ejemplo con tres eventos E, F y G donde la independencia a pares no garantice la independencia de A, B y C .